



Probabilités conditionnelles, indépendance

1. Probabilités conditionnelles ("sachant que")

A. Définition et exemples

Exemple 4.1 On a regroupé dans le tableau suivant les pourcentages de filles et de garçons d'un club de sports suivant l'activité choisie (chaque adhérent pratiquant un et un seul sport) :

	Curling	Pétanque	Fléchettes
Filles	12	13	27
Garçons	16	12	20

1. On choisit au hasard un élève de ce club de sports. On note F l'événement « c'est une fille », et C l'événement « l'adhérent pratique le curling ». On a alors : $p(F) = \frac{52}{100} = 0,52$, $p(C) = 0,28$ et $p(F \cap C) = 0,12$.
2. On rencontre au hasard un adhérent de ce club et c'est une fille. Quelle est la probabilité qu'elle pratique le curling ? Cette probabilité est $p = \frac{12}{52}$ (il y a 12 "curlingueuses parmi les 52 filles). On a donc : $p = \frac{12}{52} = \frac{0,12}{0,52} \approx 0,23$. On dit que p est une *probabilité conditionnelle*. On note $p_F(C) = \frac{p(F \cap C)}{p(F)}$. On lit : probabilité de C sachant F .

Définition 4.1 Soit A et B deux événements d'un univers Ω . Si $p(B) \neq 0$, on appelle « probabilité de A sachant B » ou « probabilité de A si B » et on note $p_B(A)$ le nombre :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Exercice 4.1 On considère deux événements A et B d'un même univers tels que :

$$P(A) = 0,1 \quad P(B) = 0,2 \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = 0,01$$

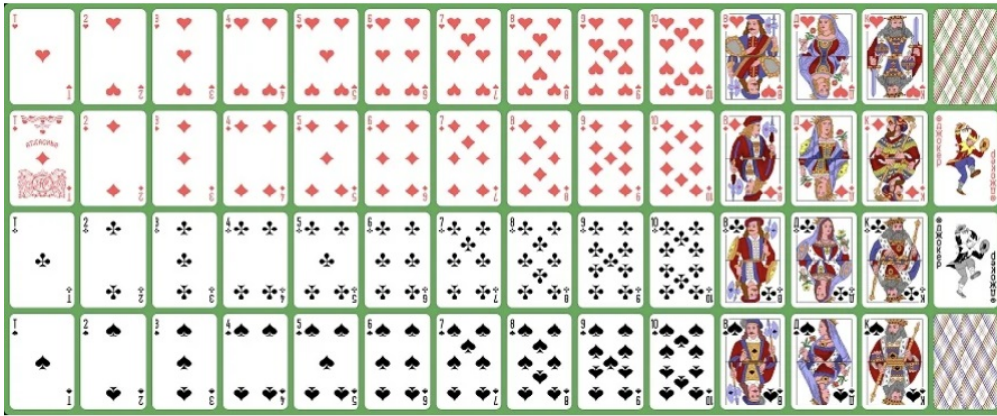
Avec la formule donnée dans la définition 4.1, calculer :

1. $P_B(A)$

.....

2. $P_A(B)$

.....



Exercice 4.2 On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.

On considère les événements suivants :

C : « La carte tirée est un cœur »

T : « La carte tirée est un trèfle »

R : « La carte tirée est rouge »

D : « La carte tirée est une dame »

F : « La carte tirée est une figure »

1. Déterminer $P_C(D)$

.....

.....

.....

.....

2. Déterminer $P_R(C)$

.....

.....

.....

.....

3. Déterminer $P(F \cap T)$

.....

.....

.....

.....

4. Déterminer $P(D \cup C)$

.....

.....

.....

.....

5. Quelle est la probabilité que la carte tirée soit une figure rouge ?

.....

.....

.....

.....

6. Sachant que la carte tirée est une dame, quelle est la probabilité que la carte soit un trèfle ?

.....

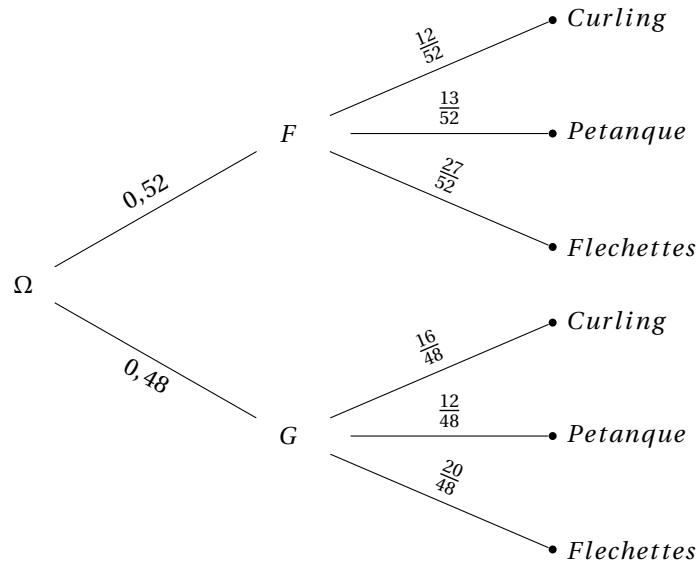
.....

.....

.....

B. Arbres pondérés

Exemple 4.2 On peut représenter la situation de l'exemple 4.1 par un arbre pondéré :



Sur chaque branche de l'arbre, la probabilité se rapporte à « l'univers du nœud précédent » ; ainsi, la probabilité $\frac{12}{52}$ est la probabilité de choisir une « curlingueuse » parmi les filles (l'univers de référence est l'ensemble des filles).

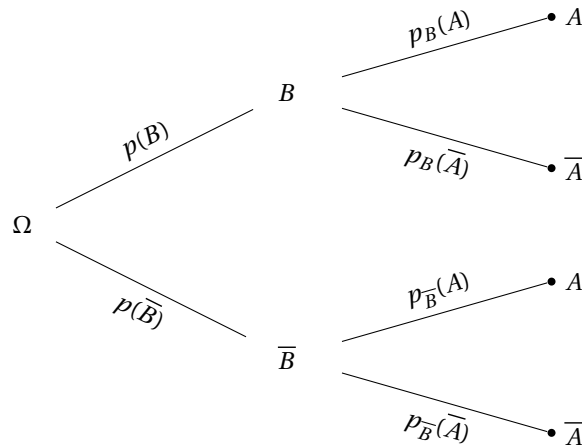
Règles de l'arbre pondéré : on considère l'arbre pondéré tracé ci-après. Les règles indiquées ci-dessous sont toujours vérifiées :

- la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 :

$$p_B(A) + p_B(\bar{A}) = 1;$$

- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des différentes branches qui constituent ce chemin :

$$p_B(A) \times p(B) = p(A \cap B)$$



Exercice 4.3 Un disquaire range l'ensemble de ses CD en trois catégories :

- Les CD de variétés qui représentent 40% de l'ensemble et dont 75% sont des albums
- Les CD de pop-rock qui représentent 35% de l'ensemble et dont 80% sont des albums
- Les CD de classique-jazz qui représentent 25% de l'ensemble et dont 99% sont des albums

Le disquaire dispose de deux formats de CD : les albums et les deux-titres.

Un client prend un CD au hasard.

1. Traduire les informations données à l'aide d'un arbre pondéré

2. Quelle est la probabilité que le CD pris par le client soit un album ?

.....

.....

.....

.....

3. Sachant que le CD pris par le client est un album, quelle est la probabilité que ce soit un CD de classique-jazz ?

.....

.....

.....

.....

Exercice 4.4 (*exercice type Bac*).

Un internaute souhaite faire un achat sur internet. Quatre sites, un français, un allemand, un canadien, et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions (les initiales du pays désignent les événements « L'achat s'effectue dans le pays ») :

$$P(F) = P(A) ; \quad P(F) = \frac{1}{2}P(C) ; \quad P(C) = P(I)$$

1. Traduire les informations données à l'aide d'un arbre pondéré

2. Calculer les probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ et $P(I)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de l'événement S « l'internaute achète un supplément » :

$$P_F(S) = 0,2; \quad P_A(S) = 0,5; \quad P_C(S) = 0,1; \quad P_I(S) = 0,4$$

(a) Compléter l'arbre pondéré de la question précédente avec ces probabilités.

(b) Déterminer $P(S \cap A)$

.....

.....

.....

.....

(c) Montrer que $P(S) = \frac{17}{60}$

.....

.....

.....

.....

(d) L'internaute a acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

.....

.....

.....

.....

Exercice 4.5 (Sujet de Baccalauréat général série S, Antilles-Guyane juin 2016)

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

2. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.

.....

.....

.....

.....

.....

3. L'ampoule tirée est sans défaut.

Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 4.6 (Sujet de Baccalauréat général série S, Amérique du sud 2013)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :

M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »

C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. (a) Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$.

.....

.....

.....

.....

- (b) Calculer $P(C)$.

.....

.....

.....

.....

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

.....

.....

.....

.....

2. Indépendance

Intuitivement, deux expériences sont *indépendantes* si le résultat de l'une d'elle n'influence pas le résultat de l'autre.

Propriété 4.1 Lorsque deux événements sont indépendants (et uniquement dans ce cas), on a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exercice 4.7 Dans une classe de 30 élèves, 10 font partie du club photo et 6 sont membres du club théâtre. Enfin, deux élèves sont membres de ces deux clubs.

On interroge un élève de la classe, pris au hasard.

Montrer que les événements C "l'élève fait partie du club photo" et T "l'élève fait partie du club théâtre" sont indépendants.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 4.8 Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par A et B, indépendants l'un de l'autre. 2% des montres fabriquées présentent le défaut A, et 10% le défaut B.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les éléments suivants :

- A : "La montre présente le défaut A"
- B : "la montre présente le défaut B"

1. Montrer que la probabilité que la montre tirée ne présente aucun des deux défauts est égale à 0,882.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Déterminer la probabilité que la montre présente au moins un défaut.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Déterminer la probabilité que la montre présente un et un seul des deux défauts.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 4.9 On lance deux fois de suite un dé équilibré et on s'intéresse à l'événement A : « le nombre obtenu est divisible par 3 ».

Les deux lancers sont **indépendants** l'un de l'autre : lors du deuxième lancer, le dé ne se "souvient" pas du score qu'il a fait au premier lancer...

On peut représenter cette situation par un arbre où on note A_i l'événement « au tirage i le résultat est divisible par 3 ».

Représenter la situation par un arbre pondéré :

Dans un arbre pondéré représentant la répétition d'expériences aléatoires, la probabilité d'un « chemin » est **le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin**. Grâce à l'arbre ci-dessus, calculer la probabilité d'obtenir deux multiples de 3 à la suite l'un de l'autre.

.....
.....
.....
.....
.....
.....